

Superconductivity, Superfluids, and Condensates

2020/05/08 堀 文哉


○第2章の流れ

《2.1 Introduction》

《2.2 Classical and quantum fluids》

《2.3 The macroscopic wave function》

《2.4 Superfluid properties of He II》

《2.5 Flow quantization and vortices》(今回のトピック) 

《2.6 The momentum distribution》

《2.7 Quasiparticle excitations》

《2.8 Summery》

○前節までの復習

【2.3 The macroscopic wave function】

超流動の秩序変数である巨視的波動関数 (macroscopic wave function) は

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0} e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (2.20)$$

で与えられる。

【2.4 Superfluid properties of He II】

超流動の流れの密度は

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{m} n_0 \nabla \theta \quad (2.22)$$

で与えられる。 $\mathbf{j}_0 = n_0 \mathbf{v}_s$ から超流動速度は

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (2.23)$$

と表される。

○流体力学で扱う物理量について

◇渦 (vorticity) $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$

※渦 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ のつくる速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、電磁気学において、導線上に電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ が流れているとき、アンペールの法則により与えられる磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ に対応している。

◇循環 (circulation) $\kappa = \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

◇ポテンシャル流 (potential flow)

任意のスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ について $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ が成り立つので、渦がない($\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$)場合、速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } \phi$ と表せる。この $\phi(\mathbf{r})$ を速度ポテンシャルと呼び、速度ポテンシャルで導かれる流れをポテンシャル流という。

2.5 Flow quantization and vortices

目的

超流動の特徴でもある量子渦について理解する。

キーワード: 渦なし, 循環, 巻付き数, 永久流, 渦糸, 渦芯, 乱流…

He II における超流動速度 \mathbf{v}_s は位相 θ の勾配として表されることを(2.23)で見た。

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (2.35)$$

この速度場は流体力学で言うところのポテンシャル流であり, 渦なし(irrotational)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}_s &= \nabla \times \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \theta \right) \\ &= \frac{\hbar}{m} \nabla \times (\nabla \theta) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.36)$$

である。ここで, 任意のスカラー場 ϕ について $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ であることを用いた。

図 1 に示したような閉じた管路を He II が流れる場合を考える。

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} \quad (2.37)$$

のように, 循環(circulation) κ を, 速度場 \mathbf{v}_s を閉じた経路に沿った一周積分と定義する¹。この循環を計算すると

$$\kappa = \oint \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \theta \right) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \Delta \theta \quad (2.38)$$

となる²。ここで, $\Delta \theta$ は管路を一周したときの位相 θ の変化である。しかし, 巨視的波動関数 $\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0} e^{i\theta(\mathbf{r})}$ は一価関数であり, そのためには

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) e^{i\Delta \theta} \quad (2.39)$$

となるはずである。(2.39)を満たすために, $\Delta \theta$ は

$$\Delta \theta = 2\pi n \quad (2.40)$$

となる。ここで, n は整数である。結局,

¹ 流体力学における「循環」と定義は同じである。

² 一見すると(2.36)からストークスの定理を用いて循環 κ は 0 になりそうだが, 補足の「ストークスの定理に関して注意点」から積分領域が多重連結(穴がある)で 0 とならない場合がある。

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\hbar}{m} \Delta\theta \\
&= \frac{\hbar}{m} \cdot 2\pi n \\
&= \frac{h}{m} n \quad \left(\because \hbar = \frac{h}{2\pi} \right)
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

となり, これは速度場 \mathbf{v}_s の循環 κ が h/m を単位として量子化されていることを表している。

図1 閉じた管路を流れる He II。

この循環量子 n は閉曲線周りの位相 θ の巻付き数 (winding number)³と一致している。図2では, 位相を矢印の方向として考え, 直線上で位相 θ が変化している場合について示した(この場合, 巻付き数は1である)。また, 閉曲線周りの位相 θ の巻付き数が, 具体的に $n = 0, 1, 2, 4$ の場合について図3について示した。いずれも, 矢印の方向の変化に注目すると理解しやすいだろう。

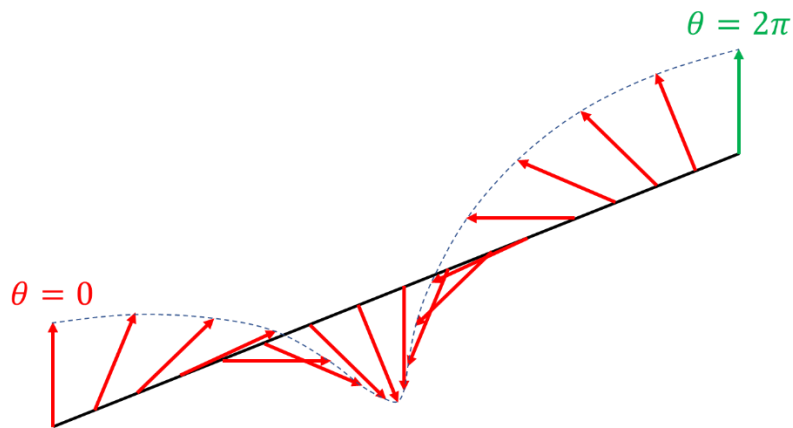


図2 位相を矢印の方向として考え, 直線上で位相 θ が変化している場合の位相変化を表現したもの。巻付き数は1である。

³ 文献[1]では, 位相幾何学 (topology) において, 巻付き数 (winding number) は平面の閉曲線が与えられた点の周りを周った総回数を表す整数だとあるが, 今回の巨視的波動関数の位相についての議論では「点の周り」ではなく「閉曲線の周り」のことだと思われる。

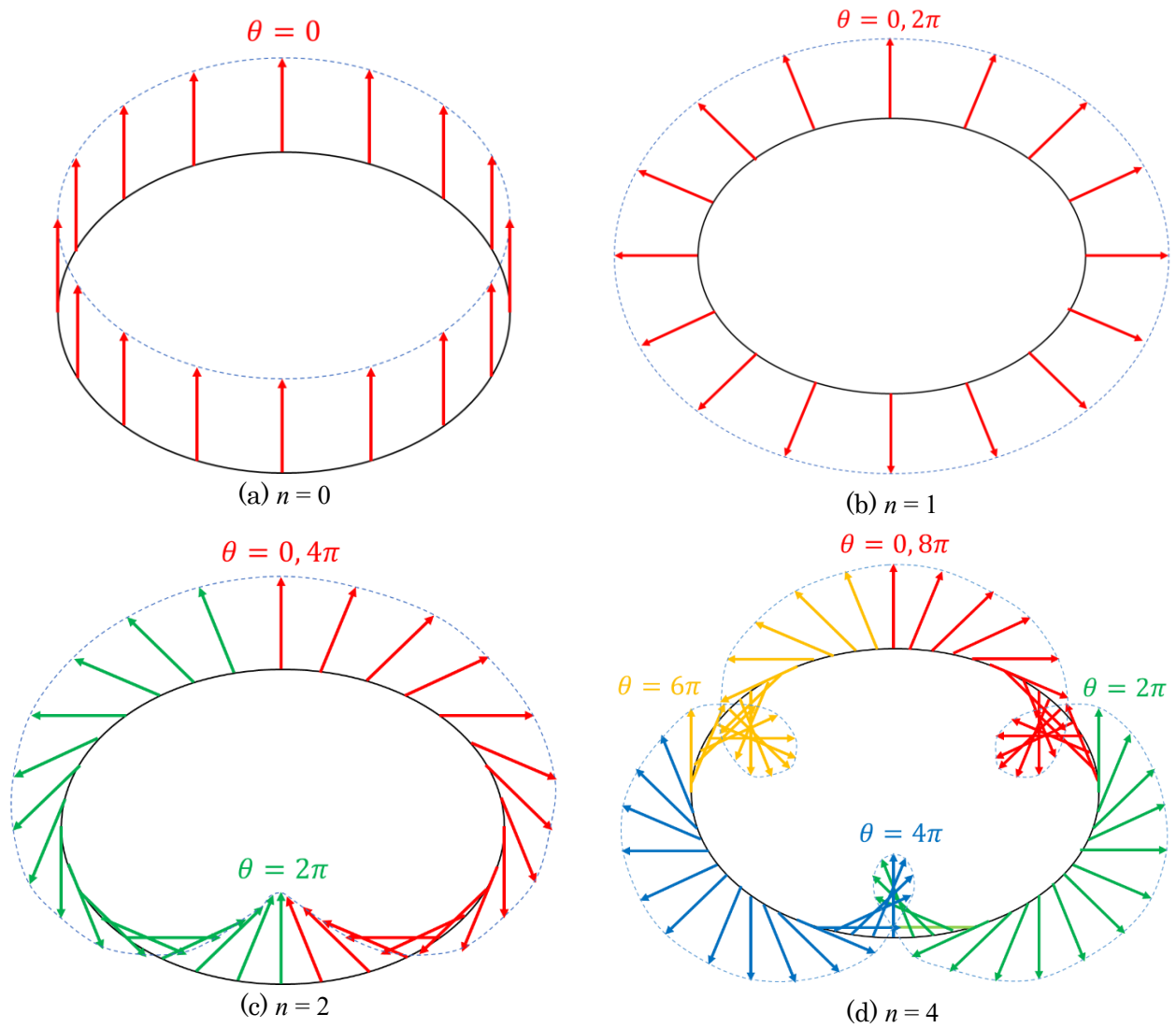


図3 位相を矢印の方向として考えたときの位相変化を、閉曲線周りの位相 θ の巻付き数がそれぞれ、(a) $n = 0$ の場合、(b) $n = 1$ の場合、(c) $n = 2$ の場合、(d) $n = 3$ の場合で表現したもの。波動関数が一価関数であることは、一周した前後で矢印の方向が変わらないことで表現できている。

超流動速度の循環が量子化されていることを実証する実験は多々ある。例えば、円管を回転させて直接測定する方法や、二重円筒の間に流体を入れ、内側の円筒を回転させる方法である⁴。容器を回転させ全流体を流し、その後ゆるやかに冷却し、超流動渦流をつくる。このとき、循環 κ は滑らかに変化せず、 h/m の飛びが見られる(図4)。この飛びを位相スリップ(phase slip)と呼ぶ。

図 4 回転角速度に対する循環の測定[2], [4]。

T_c 以上の常流動状態で回転させてから温度を下げると、循環する超流動が作れる。超流動は粘性がないので、原理上、永久流(persistent current)が実現することになる。

液体 He が、上で考察したような閉じた管路ではなく円筒容器⁵に入れて回転させることを考える。 $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ であるため、ストークスの定理から

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.42)$$

となり循環 κ はなくなる。この場合、超流動体は回転せずに遠心力の影響を受けないため、表面は平面となるはずである。しかし、実際には、回転する古典流体⁶のように He II の表面は曲面を描く(図 5)。これはなぜだろうか？この問題を解決するには渦糸(vortex)が存在すると考えるしかない⁷。

⁴ 文献[2],[3]で紹介されている F. W. Vinen の実験では、二重円筒ではなく円筒容器に導線(弦)をはり、流体内部に二重連結領域(領域内に穴が1つ)をつくり、導線(弦)を振動させた際のマグヌス力(静止流体中を循環をもつ物体が動くとき、あるいは循環を持つ物体が流れの中に置かれたときに受ける揚力)を利用して循環 κ を決定する(二重円筒は粘性の測定方法で紹介されている)。図 4 では、Vinen と基本的に同じ方法である、P. W. Karn らによる実験結果の一例である[4]。

⁵ 円筒容器は閉じた管路と違い単連結(穴がない)なのでストークスの定理が成立する。

⁶ 古典流体では、粘性により通常の液体のように周りの容器と一緒に回り、遠心力を受ける。すなわち、

$$\begin{aligned} \rho \delta V r \omega^2 \cos \theta &= \rho \delta V g \sin \theta \\ \Rightarrow dh/dr &= \tan \theta = \omega^2 r/g \\ \Rightarrow h &= \omega^2 r^2/2g \end{aligned}$$

となり、流体の表面は曲面を描く。

⁷ 電磁気学でも同じことが言える。例として、 $r = 0$ の z 軸に平行な直線電流 I が作る磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を考える。アンペールの法則を用いると $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mu_0 I/2\pi r)\mathbf{e}_\phi$ が求められる。 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ に rot をとると、(2.42)からもちろん $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ となるため、一見すると $\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = 0$ となり、アンペールの法則を満たさないように思える。しかし、(2.42)の公式は r の逆数を含み、 $r \neq 0$ についてしか成立しないため、実際には $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = I\mu_0 \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$ とデルタ関数で表され、 $r = 0$ で発散している(すなわち、マクスウェル方程式から電流密度が $\mathbf{i} = I\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$ である)。故に、 $\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$ とアンペールの法則を満たす。 $r = 0$ における発散の有無に注意が必要である。

図 5 回転する円筒容器内の液体ヘリウム。

渦糸は $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ の条件を満たしながら存在できる渦である。円筒座標において、 $\nabla \times \mathbf{v}_s$ は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}_s &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\phi & v_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

と表される。ここで、渦が円筒対称性を持つ(すなわち、 \mathbf{v}_s が r だけに依存し、 ϕ や z には依存しない)と仮定すると、 $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ の z 成分を考えれば、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) = 0 \quad (\because \frac{\partial v_r}{\partial \phi} = 0) \quad (2.44)$$

故に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) &= 0 \\ \Rightarrow rv_\phi &= \text{const.} \\ \Rightarrow v_\phi &= \frac{\kappa}{2\pi r} \quad (\because \kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \mathbf{v}_s &= \frac{\kappa}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.45)$$

と求まる。循環 κ は $\kappa = n(h/m)$ で与えられるはずだが、実際にはエネルギー安定性から $n = \pm 1$ の渦糸だけが観測される⁸。

⁸ 渦糸の単位長さあたりのエネルギー E は

$$E = \frac{\rho_s}{2} \int \mathbf{v}_s^2 \cdot dS \propto \kappa^2 \propto n^2$$

となる。ここから、トータル循環量子が与えられたとき、 n の大きな渦ができるより、 $n = \pm 1$ の渦がたくさんできるほうが安定であることが分かる[3]。

(2.45)は $r \neq 0$ で、 $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ を満たし、 $r = 0$ で \mathbf{v}_s は発散する。しかし、無限大の速度が存在するというのは非現実的である。故に、物理的には、 $r = 0$ の近くでは流体がある構造を持ち、**渦芯 (vortex core)**とよばれる有限の領域が存在していると考えられており、その大きさは理論的にも、実験的にも数Åの大きさであることが知られている。渦芯では、巨視的波動関数 $\psi_0(\mathbf{r})$ は0であり、位相 θ が定義できない。故に、流れ密度 $\mathbf{j}_s = n_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ である⁹。渦芯以外の流れ密度は(2.45)から r に反比例する。

回転する円筒容器の中の超流動 He は図 5 のように多くの渦芯が存在する。円筒容器の半径を R 、角速度を ω とすると、円筒容器全体の循環は

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = (2\pi R)(\omega R) \quad (\because \mathbf{v}_s(r = R) = \omega R \mathbf{e}_\phi) \quad (2.46)$$

と与えられる。また、循環に対する1本の渦芯の寄与が h/m とすると、

$$\kappa = \frac{h}{m} N_v \quad (2.47)$$

となる。ここで、 N_v は渦芯の総本数である。(2.46)と(2.47)から単位面積当たりの渦芯の本数は次式で与えられる。

$$\frac{N_v}{\pi R^2} = \frac{2m\omega}{h} \quad (2.48)$$

また、小さい角速度の下で、図のように渦糸は二次元面内で三角格子状の配置¹⁰をとるが、十分大きい速度下ではタングル状に発達した**乱流 (turbulence)**状態が実現する。

ここまで述べてきた渦糸は、原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体においても観測されている(図 6)。

図 6 J. R. Abo-Shaeer, W. Ketterle らによる回転ボース・アインシュタイン凝縮体の量子渦の観測 [6]。

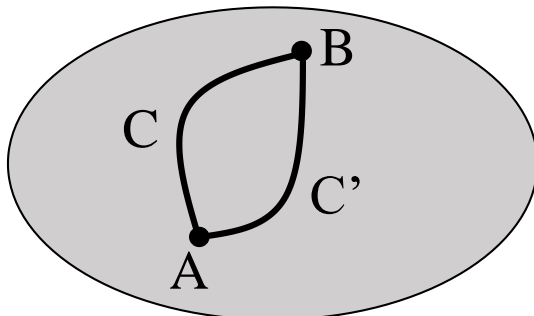
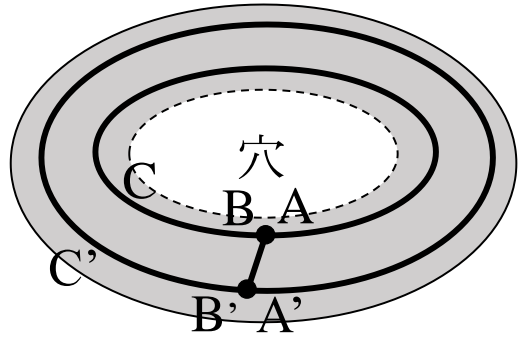
⁹ Gross-Pitaevski 方程式を解くことで、渦糸の内部構造を捉えることができる[2][3]。

¹⁰ 同じ向きの渦糸の間には互いに斥力が働く(電磁気学におけるローレンツ力と対応している)ことにより、最低エネルギーの配置が三角格子となることは二次元結晶と同じである。

○補足「ストークスの定理に関して注意点」

連続変形(伸ばしたり曲げたりすることはするが切ったり貼ったりはしないこと)しても保たれる性質,いわゆるトポロジーで分類したときの「**単連結**(穴がない,連続的に変形して1点にできる)」と「**多重連結**(穴がある,連続的に1点にできない)」がストークスの定理では重要である。結論から言うと,**ストークスの定理を使う際**,定理に関わる曲面や曲線は,**単連結な領域で定義**されていなければならない。

たとえば,渦なしの速度場(すなわち, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$)における循環 κ について考える。この循環 κ は積分する閉曲線によって0になったり,0にならなったりする。

◇単連結(穴がない)の場合	◇多重連結(穴がある)の場合
	
<p>ストークスの定理が使えるので</p> $\begin{aligned} \kappa(AC'BC) &= \oint_{AC'BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \quad (\because \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}) \end{aligned}$ <p>となり,循環$\kappa(AC'BC)$は0となる。</p>	<p>ストークスの定理が使えないので$\kappa(ACB)$は0になるとは限らない。</p> <p>※但し,閉曲線 $ACBB'C'A'A$ は単連結なので$\kappa(ACBB'C'AA)$は0である。</p> $\begin{aligned} \kappa(ACBB'C'AA) &= \kappa(ACB) + \kappa(BB') \\ &\quad + \kappa(B'C'A') + \kappa(AA') \\ &= \kappa(ACB) - \kappa(A'C'B') \end{aligned}$ <p>よって,$\kappa(ACB) = \kappa(A'C'B')$は成り立つ。</p>

○参考文献

[1] 回転数(数学) – Wikipedia

URL: [https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9E%E8%BB%A2%E6%95%B0_\(%E6%95%B0%E5%AD%A6\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9E%E8%BB%A2%E6%95%B0_(%E6%95%B0%E5%AD%A6))

[2] 山田一雄, 大見哲巨「超流動(新物理学シリーズ)」(1995年)

[3] 坪田誠, 山下穰「超流動ヘリウムと量子渦(講義ノート)」(2002年)

[4] P. W. Karn, D. R. Starks and W. Zimmermann., Phys. Rev. B **21**, 1797 (1980).

[5] J. R. Abo-Shaeer, C. Ra man, J. M. Vogels, W. Ketterle, Science **292**, 476–479 (2001).